

宇宙结构参数的动力学限制

辜英求

复旦大学数学科学学院 上海

【摘要】在宇宙学中，宇宙曲率 K 和宇宙学常数 Λ 是两个最重要的参数，其值对宇宙的演化有重大的影响。本文在正能量密度和负初始压力的合理假设下，通过定性分析宇宙尺度因子与参数之间的动态关系，发现宇宙的初始奇点是不可达的， $K=1, 0 \leq \Lambda < 10^{-24} \text{ly}^{-2}$ 。这意味着，最初的大爆炸是不可能发生的，宇宙的空间结构应该是三维球面 S^3 ，宇宙的演化在时间上应该是循环的，宇宙学常数应为零或很小的量。由于证明过程是非常简单明确的，前提条件也都是公认的事实，因此这些逻辑结论应该是相当可靠的。显然，这些结论将有助于纠正一些流行的误解，并为进一步研究宇宙学中的其他问题如暗物质和暗能量的性质带来极大方便。从某种意义上讲，我们恢复了赫拉克利特的古老信念：“世界，这个万物的实体，既不是由神也不是由人创造的，她过去曾是、现在也是和将来还是永恒的活火，有规律地点燃并且有规律地熄灭”。

【关键词】宇宙模型；宇宙曲率；宇宙学常数；负压力；动态分析。

Dynamical Constraints on the Cosmological Parameters

Yingqiu Gu

School of Mathematical Sciences, Fudan University, Shanghai

【Abstract】In cosmology, the cosmic curvature K and the cosmological constant Λ are two most important parameters, whose values have a strong influence on the behavior of the universe. Under the assumptions of positive energy density and negative initial pressure, by analyzing the dynamic relationship between cosmological variables and parameters, we find that the initial singularity of the universe is unreachable, and $K=1, 0 \leq \Lambda < 10^{-24} \text{ly}^{-2}$. This means that the initial Big Bang may be impossible at all. The global spatial structure of the universe should be a 3-dimensional sphere S^3 . The evolution of the universe should be cyclic, and the cosmological constant should be zero or an infinitesimal. Since the proof is very simple and elementary, and the preconditions are generally accepted facts, these logical conclusions should be quite reliable. Obviously such constraints would be much helpful to correct some popular misconceptions and further discover the properties of dark matter and dark energy in cosmology. In some sense, we restored Heraclitus' ancient faith: "The world, an entity out of everything, was created by neither gods nor men, but was, is and will be eternally living fire, regularly becoming ignited and regularly becoming extinguished."

【Keywords】Cosmological Model; Cosmic Curvature; Cosmological Constant; Negative Pressure; Dynamic Analysis

1 引言

在宇宙学中，我们有两个重要的常数需要确定。它们是宇宙曲率 K 和宇宙学常数 Λ 。宇宙的一些特征参数，如年龄 T 、哈勃常数 H_0 、总质量密度 Ω_{tot} 等，都得到了高精度的测量^[1,2,3,4,5,6]。要确定宇宙曲率 K ，通常的方法是将 Friedmann 方程转化为无量纲代数

方程 $\Omega_K \equiv Ka^{-2} = \Omega_{\text{tot}} - 1$ ，这样 $K = 0, \pm 1$ 可以通过对比观察数据 $\Omega_{\text{tot}} > 1, = 1$ 或者 < 1 来判断。由观测数据我们有 $\Omega_K = -0.0020 \pm 0.0047$ ，它非常接近平坦空间的情况，再加上测量误差，我们很难用这个判据来确定宇宙的空间类型。事实上，无论空间曲率取值多少，对于一个年轻的宇宙，容易计算，我们总

是有 $\Omega_{\text{tot}} \approx 1$ 。所以这个判别标准是相当模糊的。

宇宙学常数 Λ 有着戏剧性的历史。自从爱因斯坦在 1917 年引入了 Λ 获得一个静态和封闭的宇宙以来, 关于 Λ 是否为零的争论已经很多次了^[7-10]。现在暗物质和暗能量吸引了全世界科学家的注意, 成为最热门的课题, 正在挑战传统的粒子和宇宙学标准模型。对暗物质和暗能量的通常描述是使用状态方程 $P=w\rho$ 和 $w=w(a)$ 或 $w=w(z)$, 并通过拟合观测数据获得了许多特定模型^[7-16]。然而, 这个问题还远未得到解决^[17]。

文献^[18-24]对一些具体的引力源进行了讨论。在文献^[18,19,20]中, 讨论了非线性标量场, 得到了循环宇宙模型。在^[21]中, 得到了一组具有正常尘埃和辐射的精确循环解, 而在^[22]中, 导出了鬼场和电磁场的精确解。在文献^[23,24]中, 计算了量子化非线性旋量场模型。在^[14]中, 通过引入势函数 $V(a)$, 将一些已知的暗能量模型的 Friedmann 方程转化为哈密顿动力系统, 并分析了其演化轨迹。

由于 Friedmann 方程是一个动力学方程, 很难用静态分析方法来确定其常数。下面的讨论表明, 在正总能量密度和负初始压力的一般性假设下, 通过定性分析 Friedmann 方程的动力学性质, 我们可以逻辑地确定常数 (K, Λ) 。这个分析是基于大量已经建立并广泛研究的宇宙学模型^[13,14,15,16]。在上述的条件下, 我们发现初始奇点实际上不能达到, 并且可以导出常数 (K, Λ) 的一些明确的限制 $K=1$ 和 $\Lambda \sim 0$ 。也就是说宇宙的空间结构是 3 维球面 S^3 , 宇宙学常数很可能为零。此外, 宇宙在时间上应该是循环的。显然, 这些结论将有助于纠正一些流行的误解, 并为进一步研究宇宙学中的其他问题, 如暗物质和暗能量的性质带来极大方便。

在^[25,26]中, 作者使用 (Ω_K, a) 相平面来讨论宇宙的动力学行为, 并从动力系统的角度得出周期性宇宙是合理的, 除了标准的宇宙学假设外, 只需要两个条件: (i) 宇宙空间必须具有正曲率 $K=1$; (ii) 宇宙后期的有效宇宙学“常数”作为尺度因子的函数必须衰减得足够快。这两个条件都与迄今为止所有的观测结果一致。在 2008 年, M. Novello 和 S. E. Perez Bergliaffa 回顾了非奇异宇宙模型和循环宇宙模型的一般特征, 讨论了反弹的机制, 并分析了实现这些机制的解决方案^[27]。

最近一篇刊登在《自然天文学》杂志上的论文

指出^[28], 我们的宇宙可能不是平坦的, 而是更像一个巨大的膨胀气球一样, 是封闭且弯曲的。在分析了欧洲航天局普朗克卫星 2018 年的数据后, 该论文作者 Eleonora Di Valentino、Alessandro Melchiorri 和 Joseph Silk 在宇宙微波背景(CMB)的功率谱中发现了增强的引力透镜幅度, 而这与标准 Λ CDM 模型的数据是有出入的。这就意味着引力对 CMB 的弯曲作用似乎比现有物理学所能解释的要大得多。宇宙微波背景是宇宙大爆炸时期遗留下来的热辐射, 这是宇宙中存在的最古老的光芒。而普朗克卫星的主要任务就是检测 CMB 温度的微小波动, 对 CMB 温度涨落的研究是解锁有关宇宙学模型和参数的关键, 正是这些信息定义了宇宙的膨胀、组成以及宇宙大尺度结构的起源。论文作者用“封闭宇宙”来解释这一异常的效应。“一个封闭的宇宙可以为这种效应提供物理解释, CMB 光谱现在更倾向于是一种大于 99% 置信度水平的正曲率”。他们写道, “在这里, 我们将进一步研究封闭宇宙的证据, 表明正曲率可以解释引力透镜的异常振幅”。现在所观察到的参数与现有宇宙标准模型 Λ CDM 是相互矛盾的, 因此有必要对宇宙的一致性模型进行讨论。

2 宇宙结构参数的确定

为了便于下面的讨论, 我们采用共形的 Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker 度规

$$ds^2 = a(t)^2(dt^2 - dr^2 - S(t)^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)), \quad (1)$$

其中 $S(r) = \sin r, r, \sinh r$ 分别对应于 $K=1, 0, -1$ 。在坐标系(1)中, 很多状态函数都具有解析的形式^[29]。我们取自然单位制 $c=1$, 也就是取光速作为速度单位。这样 Friedmann 方程变为

$$a'^2 = -Ka^2 + \frac{1}{3}\Lambda a^4 + \frac{8\pi G}{3}\rho_m a^4, \quad (2)$$

其中 ρ_m 是除了几何成分 K 和 Λ 以外其它所有引力源的总质量-能量密度, 包括粒子、辐射、暗物质、暗能量等。在宇宙学中, 上述所有引力源的总能量动量张量为

$$T_{\nu}^{\mu} = \text{diag}(\rho_m, -P, -P, -P), \quad (3)$$

对于合理的物质模型, 物态方程都是满足显式 $\rho_m = \rho(a), P = P(a)$ 的^[24,29,30,31]。在宇宙学中, 总的能量守恒定律为

$$\frac{d}{da}(\rho_m a^3) = -3Pa^2, \quad (4)$$

其中 P 是包括粒子势能在内的总压力。在^[29]中, 通过详细分析各种已知物质场的能量动量张量和物态方程, 我们得到以下两个关于总能量密度 ρ_m 和总压力 P 的条件成立:

A1. 总的质量能量密度总是正的, 即

$$\rho_m > 0, \quad (a > 0). \quad (5)$$

A2. 当宇宙很小时总的压力是负的, 即

$$P < 0, \quad (a \rightarrow +0). \quad (6)$$

$\rho_m > 0$ 是由物质场的 Hamiltonian 的正定性决定的。在宇宙学中, 虽然我们把 P 叫做压力, 但它实际上包括了所有相互作用势^[13,23,24], 因此, $P < 0$ 是合理的, 例如非线性旋量场^[29,30]和一些著名的暗能量模型^[13]都包含负压力。(6)也是一个观察性事实, 因为遥远的早期宇宙是加速膨胀的, 计算尺度因子 a 关于宇宙时间 τ 的二阶导数, 易证此时必有 $P < 0$ 。条件 A1 和 A2 是以下讨论的基本假设。

为了方便后面的讨论, 方程(2)可改写为

$$a^2 = F(a), \quad F(a) \equiv 2Ra - Ka^2 + \frac{1}{3}\Lambda a^4 + X(a), \quad (7)$$

其中 R 对应于总的静质量共形密度

$$R \equiv \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{4\pi G}{3} \rho_m a^3. \quad (8)$$

R 是一个与时间无关的常数。由(7)可知 R 具有长度量纲, 它表示宇宙的平均尺度因子^[23,29]。 $X(a)$ 对应于暗物质和暗能量的剩余部分和未知部分,^[24,29]的分析表明: 当 $a \rightarrow +0$ 时满足 $X \rightarrow -C^2 a^{-3}$; 而当 $a \rightarrow \infty$ 时满足 $X/a \rightarrow 0$ 。 $X(a)$ 的具体形式对下面的分析并不重要, 只有当 $a \rightarrow +0$ 时的渐近性态才对分析结果有影响。将 Ra 与 $X(a)$ 分离讨论, 下面就可根据观测数据估计 Λ 的取值范围。

比较(7)和(2), 我们得到了通常意义上的总质量密度为

$$\rho_m = \frac{3}{8\pi G a^4} [F(a) + Ka^2 - \frac{1}{3}\Lambda a^4] \quad (9)$$

$$= \frac{3}{8\pi G a^4} [2Ra + X(a)] \quad (10)$$

把(10)代入(4), 我们得到总压力为

$$P = -\frac{3}{8\pi G a^4} [X'(a)a + X(a)]. \quad (11)$$

由此可见, 总压力 P 只与 $X(a)$ 有关, 而与 R 无关。由于压力和势场的导数对应于普通的力, 而力必须是有限的, 所以 P 至少应该是连续的, 也就是必有

$P \in C^0$ 。这样由(11)和 P 的连续性, 我们至少有 $X(a) \in C^1$ 。因此由(7)可知, 我们也有 $F(a) \in C^1$, 也就是函数 $F(a)$ 具有不低于 1 阶的连续性。

下面我们首先证明

$$F(a) < 0, \quad (a \rightarrow +0). \quad (12)$$

在函数 $F(a)$ 中, 只有 $X(a)$ 的具体形式是不清楚的, 因此我们需要分两种情况讨论。在 $|X(0)| < \infty$ 的情况下, 由能量守恒定律(4)和负初始压力条件(6)以及 $X(a) \in C^1$, 我们有

$$P \rightarrow \frac{X(0)}{8\pi G a^4} < 0, \quad (a \rightarrow +0). \quad (13)$$

因此 $X(0) < 0$ 。当 $a \rightarrow +0$ 时, 由 $F(a)$ 的定义式(7), 我们有

$$F(0) = X(0) < 0. \quad (14)$$

对于一些非线性的作用势场^[29,30], 当 $a \rightarrow +0$ 时 $X(a)$ 具有 a 的负幂次函数形式, 即 $X \rightarrow X_0 a^{-n}$, ($n > 0$), 其中 X_0 是一个常数。在这种情况下, 由式(11)我们有

$$P \rightarrow \frac{(n+1)X_0}{8\pi G a^{4+n}}, \quad (a \rightarrow +0). \quad (15)$$

由 $P < 0$ 我们发现 $X_0 < 0$ 。再由 $F(a)$ 的定义式(7), 我们得到

$$F \rightarrow \frac{X_0}{a^n} < 0, \quad (a \rightarrow +0). \quad (16)$$

这样我们就证明了在各种情况下(12)都是成立的。

条件(12)逻辑蕴含了如下重要结论:

$a > 0$, 宇宙演化不能达到初始奇点, 大爆炸是不存在的。

现在我们证明这个结果。对于 Friedmann 方程的现实解, 我们有 $F(a) = a^2 \geq 0$ 。由(12)和 $F(a)$ 的连续性, 代数方程 $F(a)=0$ 一定有一个正根 $0 < a = a_0 \ll R$ 。

如果 $F(a)=0$ 只有这个正根 a_0 , 由于 $F(a) \in C^1$, 因此 $F(a)$ 可表示为如下形式

$$F(a) = (a - a_0)A(a), \quad (A > 0, \forall a \geq a_0). \quad (17)$$

如果 $F(a)=0$ 具有一系列不同正根 $0 < a_0 < a_1 < a_2 < \dots$, 则对实际宇宙时空, $F(a)$ 的第一个连通分支可表示为

$$F(a) = (a - a_0)(a_1 - a)B(a), \quad (a_0 \leq a \leq a_1), \quad (18)$$

其中 $B(a) > 0$ 。

由于弗里德曼方程是一个平均意义上的方程, 所以重根解在物理上是没有意义的。

图1是动力学方程(7)的连通相轨道 $a \sim a'$ 的示意图, 包括(17)和(18)两种情况, 其中长度单位为 $R=1$ 。(18)对应于循环宇宙模型, 而(17)对应于反弹宇宙模

型。我们取时间原点 $t=0$ 为宇宙演化的转折点 $a(0) = a_0$ 。从图1可知, 所谓宇宙大爆炸的初始奇点是不存在的, 标度因子 a 不能到达0点。

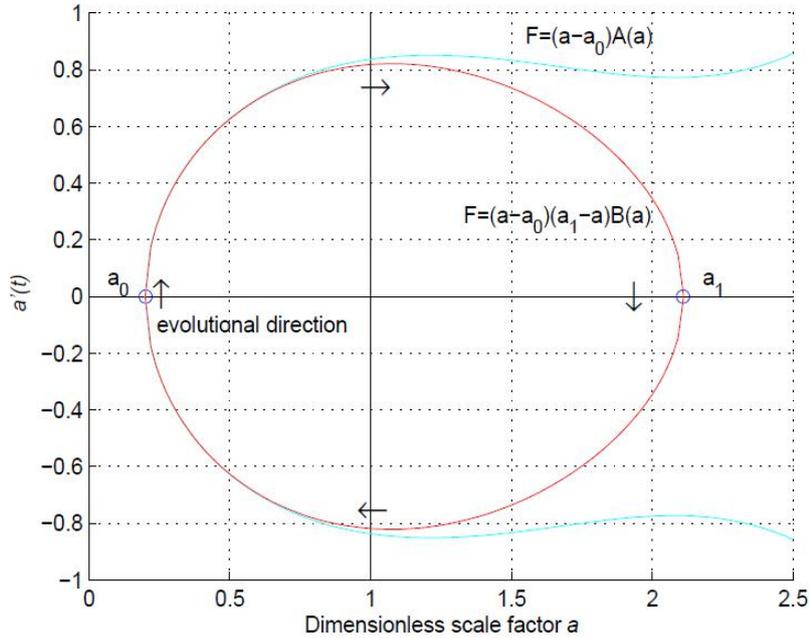


图1: Friedmann 方程(7)的相轨道示意图, 长度单位为 R 。

把(17)或(18)代入(9), 令 $a = a_0$, 由(5)我们得到

$$\rho_m(a_0) = \frac{3}{8\pi G a_0^2} \left(K - \frac{1}{3} \Lambda a_0^2 \right) > 0. \quad (19)$$

由于在宇宙学中 $\Lambda \geq 0$, 从(19)和 $\rho_m > 0$ 可知, 我们必有 $K=1$ 。这样我们得到另一个重要结论:

$K=1$, 宇宙空间是一个3维球面 S^3 。

对循环闭合宇宙模型(18), 宇宙学常数 Λ 有如下的上界估计。把(18)代入(9) 并令 $a = a_1$, 我们有

$$\rho_m(a_1) = \frac{3}{8\pi G a_1^2} \left(1 - \frac{1}{3} \Lambda a_1^2 \right) > 0. \quad (20)$$

由于 Ra 是目前质量密度的主要部分, 可以用观测数据来估计^[23], 并且 $|X(a)| \ll Ra$, ($a \rightarrow \infty$) 可以忽略不计。于是我们有关于宇宙学常数的重要估计

$$0 \leq \Lambda < \frac{3}{a_1^2} \leq \frac{3}{4R^2} \sim 10^{-24} \text{ly}^{-2}. \quad (21)$$

对反弹宇宙模型, 当 $a \rightarrow \infty$ 时, Friedmann 方程(7)的渐近行为受主导项 Λa^4 控制, 而快速衰减项 $X(a)/a \rightarrow 0$ 可以忽略不计。上面的分析比较抽象, 接下来我们采用物理学家比较熟悉的哈密顿力学形

式来分析。令

$$q(t) = \frac{a(t)}{R}, \quad \lambda = \frac{1}{9} - \Lambda R^2. \quad (22)$$

当忽略 $X(a)$ 时, 方程(7)可以改写成如下的无量纲哈密顿力学系统

$$\frac{1}{2} q'^2 + V(q) = H, \quad (23)$$

其中 $q(t)$ 对应单位质量粒子的坐标, $V(q) = -F(a)$ 对应于粒子的势能, H 对应于粒子的总机械能。忽略 $X(a)$ 后由(7)计算得

$$V(q) = \frac{1}{6} \lambda q^4 - \frac{1}{54} q(q+6)(q-3)^2. \quad (24)$$

Friedmann 方程(7)的解对应于 $H \equiv 0$, 它是守恒的。势能函数图像 $V(q)$ 和相轨道 (q', q) 分别如图2和图3所示。

当 $\lambda > 0 \Leftrightarrow \Lambda < \frac{1}{9} R^{-2} \sim 10^{-25} \text{ly}^{-2}$ 时, 解是封闭

的; 而当 $\lambda \leq 0 \Leftrightarrow \Lambda \geq \frac{1}{9} R^{-2}$ 时, 解是反弹的。从图2和图3可以看出, λ 或 Λ 只对一个充分发展了的宇宙的行为才有影响, 而对一个很小的宇宙的行为没

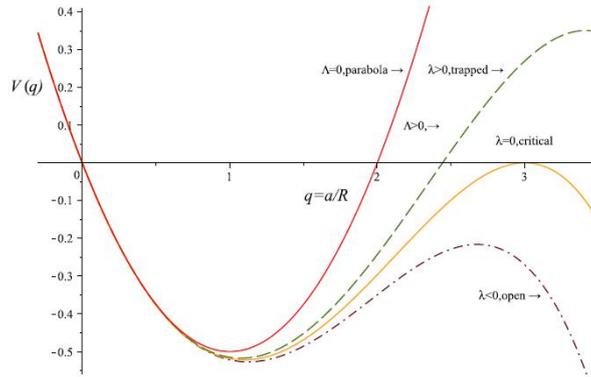


图 2: 式(24)定义的势能函数 $V(q) = \frac{1}{6}\lambda q^4 - \frac{1}{54}q(q+6)(q-3)^2$ 与宇宙空间类型的关系

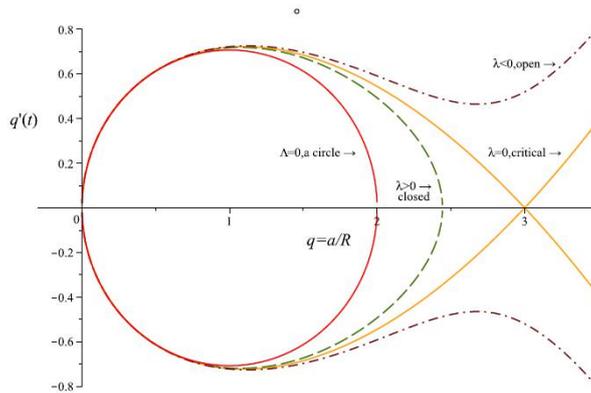


图 3: 方程 $\frac{1}{2}q'^2 + V(q) = 0$ 的相轨道, 和图1相似。圆内部对应于 $\Lambda < 0$ 而圆外部对应于 $\Lambda > 0$ 。在Friedmann 方程(7)中, $X(a) < 0$ ($a \rightarrow +0$) 消除了奇点——大爆炸。

有影响。与之相反, 函数 $X(a)$ 对充分发展的宇宙没什么影响, 但可以避免 $a(t)$ 趋于奇点。对封闭宇宙, 方程 $F(a)=0$ 有第二个正根 $2R \leq a_1 < 3R$ 。 $\Lambda < \frac{1}{9}R^{-2}$ 与(21)相比较我们发现由 $\rho_m > 0$ 确定的 Λ 的上界偏大。上面关于 Λ 上界的估计都小于当前的观察数据, 这种差异可以通过能量动量张量中的作用势来解释^[24,30], 它取代了弗里德曼方程中的 Λ , 并包含在 $X(a)$ 中。在早期宇宙演化中 $X(a)$ 具有重要影响, 但它相当于一个快速衰减的 $\Lambda(a)$ 。因此在宇宙学中, 取宇宙学常数 $\Lambda = 0$ 是一个好的选择。

对反弹模型我们有 $(\frac{d}{dt}a)^2 \rightarrow C^2 a^2 \Leftrightarrow a \rightarrow C_0 \cosh(C\tau)$ 当 $\tau \rightarrow \pm \infty$, 这里 $d\tau = a(t)dt$ 是牛顿的宇宙时间[[]。具有封闭空间的反弹模型与目前宇宙的各向同性和均匀性是相矛盾的, 因为在转向点 $t < 0$ 之前, 宇宙各遥远部分之间缺乏因果关联, 宇宙应该具有高度的各向异性和不均匀性, 某些信息应该

保持到今天的。但是现在没有观察到这种不均匀性。

总之, 通过逻辑分析一般 Friedmann 方程的动力学行为和参数之间的约束关系, 我们得到了关于参数 (K, Λ) 的一些明确限制。我们发现只有具有 $\Lambda \cong 0$ 的循环封闭宇宙模型, 在物理上才是合理的和相容的, 其他情况总是包含非物理效应或者逻辑矛盾。上面这些参数限制显然对深入研究宇宙学中其他问题会有极大的帮助。

3 一些启示

由于上述推理都是明确和可靠的, 推理的前提条件也都是物理上很普通的要求并且具有很广泛的适用面, 因此本文的结论具有相当高的可信度。然而, 上述结论与所谓奇点定理是相矛盾的, 这是因为在一般情况下, 这些定理的一些前提条件在现实世界中是无效的。首先, 在奇点定理的能量条件中, 忽略了负压力或势场的存在, 能量条件不是一般成立的。第二, 由于爱因斯坦方程明显地包括粒子的运动, 所以闭合

诱陷面是不能动态地形成的,星体中心是粒子的不平衡点,在严重弯曲的空间中,星体中的粒子不可能在中心附近停留和静态积累。用万有引力的语言描述就是:引力场是保守场,星体的总的动能与势能之和是守恒的,你不可能把所有的物质都放入视界之内。考虑到这个相容的因素后,恒星的爱因斯坦场方程解总是无奇性的^[32]。第三,宇宙时空中只有唯一现实的同时 Cauchy 面^[33],也就是存在统一的牛顿宇宙时间。但推导 Raychaury 方程时违反了这一要求,该方程无意中假定和使用了时空未来的性质,这在动力学分析中是非法的。因此,利用这个方程证明的奇点定理在物理上是无效的。

除了应对标准模型和奇点定理的技术问题进行反思,我们可能还应该对我们的研究方法和学术环境进行反思。例如具体的封闭宇宙模型^[23,24]1998年就已经完成了^[34],其研究方法显然是科学的和严谨的,但屡次遭到退稿。本篇论文的基本内容2007年就完成了(见 arXiv:0709.2414),假设和论证都非常简单明了,结论很有启发作用,但是也被专业期刊屡次退稿。退稿理由都是莫名其妙的非学术性理由,物理学界好像丧失了基本的科学思维一样。这种状况极大地阻碍了正常的学术交流和科学进步,基础物理近百年来停滞不前,物理学界不健康的学术环境应该负有重要的责任。

本文的显著特点是展示了逻辑和抽象的力量。逻辑关系是现实中因果关系的反映和拓展,是科学大厦的基石,是科学研究不可抗拒的原则。只要前提正确有效,逻辑结论就必定是对的;如果结论相互矛盾,理论就必定存在问题。由于过度的实用主义开发,物理学界在很大程度上被量子论的繁荣景象和奇怪观点所迷惑,以致认为科学可以异想天开、不必受逻辑规则约束,因此做了大量的无用功。宇宙学发展至今,具体物质模型指数增长,形式上越来越复杂,让人莫衷一是。本文摆脱具体物质模型的局限性,利用质量和压力的一般性质来抽象地分析动力学方程,从而得到了关于宇宙结构参数的具体数值和演化趋势。如果按传统的研究具体物质模型的方式,将会走很长的弯路,并且很难得到上述结论。

致谢

本文按照审稿人和主编的宝贵建议进行了修改和完善,作者衷心感谢他们的善意帮助。

参考文献

- [1] A. G. Riess et al. (Supernova Search Team), *Astron. J.* 116: 1009 (1998), astro-ph/9805201.
- [2] S. Perlmutter et al. (Supernova Cosmology Project), *Astrophys. J.* 517: 565(1999).
- [3] N. Spergel et al. (WMAP), *Astrophys. J. Suppl.* 148: 175(2003), astro-ph/0302209.
- [4] M. Tegmark et al. (SDSS), *Phys. Rev. D* 69: 103501(2004), astro-ph/0310723.
- [5] J. Dunkley et al. The Atacama Cosmology Telescope: Cosmological Parameters from the 2008 Power Spectra, *Astrophys. J. Vol.739, No.1* (2011), arXiv:1009.0866
- [6] J. L. Sievers et al. The Atacama Cosmology Telescope: Cosmological parameters from three seasons of data, *J. Cosm. Astro. Phys.*, 2013 (10): 60(2013), arXiv:1301.0824
- [7] V. Sahni, The cosmological constant problem and quintessence, *Class. Quant. Grav.*, 19:3435-3448 (2002), astro-ph/0202076
- [8] J. Fonseca, R. Maartens, M. G. Santos, Probing the primordial Universe with MeerKAT and DES, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 466(3), 2780 (2017). arXiv:1611.01322
- [9] P. J. E. Peebles, B. Ratra, The Cosmological Constant and Dark Energy, *Rev. Mod. Phys.* 75: 559-606(2003), astro-ph/0207347
- [10] M. S. Turner, D. Huterer, Cosmic Acceleration, Dark Energy and Fundamental Physics, *J.Phys. Soc. Jap.* 76: 111015(2007), arXiv:0706.2186
- [11] T. Padmanabhan, Dark Energy: the Cosmological Challenge of the Millennium, *Curr. Sci.* 88: 1057(2005), astro-ph/0411044
- [12] M. Ishak, Remarks on the formulation of the cosmological constant/dark energy problems, *Found.Phys.* 37: 1470-1498(2007), astro-ph/0504416
- [13] M. Szydlowski, A. Kurek, A. Krawiec, Top ten accelerating cosmological models, *Phys. Lett. B* 642:171-178(2006), astro-ph/0604327
- [14] Marek Szydlowski, Cosmological zoo - accelerating models with dark energy, *JCAP* 0709: 007(2007),

- astro-ph/0610250
- [15] E. J. Copeland, M. Sami, S. Tsujikawa, Dynamics of dark energy, *IJMPD* 15: 1753-1936(2006), hep-th/0603057.
- [16] E. V. Linder, Theory Challenges of the Accelerating Universe, *J.Phys.A40*: 6697(2007), astro-ph/0610173
- [17] Ph. Bull1a, Y. Akrami, et al., Beyond Λ CDM: Problems, solutions, and the road ahead, *Physics of the Dark Universe* 12: 56-99(2016), arXiv:1512.05356
- [18] P. J. Steinhardt, N.Turok, A Cyclic Model of the Universe, *Science* 296: 1436(2002), hep-th/0111030
- [19] P. J. Steinhardt, N.Turok, The Cyclic Model Simplified, *New Astron.Rev.* 49:43-57(2005), astro-ph/0404480
- [20] J. Khoury, P. J. Steinhardt, N.Turok, Designing Cyclic Universe Models, *Phys. Rev. Lett.* 92: 031302(2004), hep-th/0307132
- [21] J. D. Barrow, M. P. Dabrowski, Oscillating universes, *Mon. Not. Astron. Soc.* 275: 850-862(1995).
- [22] J. D. Barrow, D. Kimberly, J. Magueijo, Bouncing Universes with Varying Constants, *Class. Quant. Grav.*, 21 (18): 57-61(2013), astro-ph/0406369
- [23] Y. Q. Gu, A Cosmological Model with Dark Spinor Source, *Int. J. Mod. Phys. A22*: 4667-4678(2007), gr-qc/0610147.
- [24] Y. Q. Gu, Clifford Algebra, Lorentz Transformation and Unified Field Theory, *Adv. Appl. Cliff. Alg.* 28(2):37 (2018).
<https://doi.org/10.1007/s00006-018-0852-0>
- [25] M. Madsen and G. Ellis, Evolution of in in ationary universes, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 234 (1988) 67.
- [26] George F.R. Ellis, Emma Platts, David Sloan, Amanda Weltman, Current observations with a decaying cosmological constant allow for chaotic cyclic cosmology, *JCAP* 04 (2016) 026
- [27] M. Novello, S.E.P. Bergliaffa, Bouncing cosmologies, *Physics Reports* 463 (2008) 127-213.
- [28] Di Valentino, E., Melchiorri, A., Silk, J. Planck evidence for a closed Universe and a possible crisis for cosmology. *Nat. Astron.* (2019)
doi:10.1038/s41550-019-0906-9
- [29] Y. Q. Gu, Energy-Momentum Tensor and Parameters in Cosmological Model, Preprints 2020, 2020020366 (doi:10.20944/preprints202002.0366.v1)
- [30] Y. Q. Gu, Nonlinear Spinors as the Candidate of Dark Matter, *OALib. J.* 4, e3954(2017), arXiv: 0806.4649
- [31] Y. Q. Gu, Local Lorentz Transformation and Mass-Energy Relation of Spinor, *Physics Essays Vol.* 31: 1-6(2018). arXiv:hep-th/0701030
- [32] Y. Q. Gu, Structure of the Star with Ideal Gases, arXiv: 0712.0219
- [33] Y. Q. Gu, Some Subtle Concepts in Fundamental Physics, *Physics Essays* 30: 356-363(2017), arXiv: 0901.0309
- [34] Y. Q. Gu, The Electromagnetic Potential Among Nonrelativistic Electrons, *Adv. Appl. Cliff. Alg.* 9(1), 61-79(1999)

收稿日期: 2020年4月15日

出刊日期: 2020年5月14日

引用本文: 辜英求. 宇宙结构参数的动力学限制[J]. 国际应用数学进展, 2020, 2(1): 14-20.

DOI: 10.12208/j.aam.20200002

检索信息: 中国知网、万方数据、Google Scholar

版权声明: ©2020 作者与开放获取期刊研究中心(OAJRC)所有。本文章按照知识共享署名许可条款发表。<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



OPEN ACCESS